1. Si costruisce la tabella $\boldsymbol{A} := \mid \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{I}_{m\times m} \mid$, dove $\boldsymbol{I}_{m\times m}$ è la matrice identità $m \times m$.

2. Per $j := 1, \ldots, n$ (indice di colonna associato alle transizioni):

   (a) sia $\mathcal{I}_+ := \{i \mid A(i,j) > 0\}$ l'insieme degli indici di riga che corrispondono a elementi positivi della colonna j;

   (b) sia $\mathcal{I}_- := \{i \mid A(i,j) < 0\}$ l'insieme degli indici di riga che corrispondono a elementi negativi della colonna j;

   (c) per ogni coppia $(i_+, i_-) \in \mathcal{I}_+ \times \mathcal{I}_-$:

      i. sia $d := \mathrm{mcm}\{A(i_+,j), -A(i_-,j)\}$ il minimo comune multiplo dei due elementi $A(i_+,j)$ e $-A(i_-,j)$;
      ii. sia $d_+ := d/A(i_+,j)$ e $d_- := -d/A(i_-,j)$;
      iii. si aggiunge alla tabella la nuova riga: $d_+ \, \boldsymbol{A}(i_+,\cdot) + d_- \, \boldsymbol{A}(i_-,\cdot)$, combinazione lineare delle righe di indice i_+ e i_- (la nuova riga ha elemento j-mo pari a zero per costruzione);

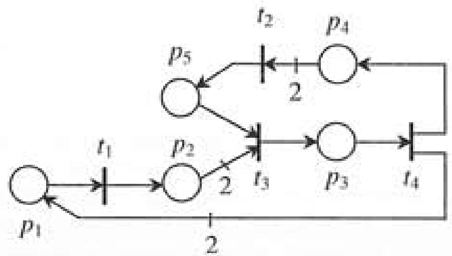
   (d) si cancellano da $\boldsymbol{A}$ le righe di indice $\mathcal{I}_+ \cup \mathcal{I}_-$, corrispondenti a elementi diversi da zero lungo la j-ma colonna.

3. La tabella $\boldsymbol{A}$ risultante è della forma $\boldsymbol{A} = \mid \boldsymbol{0}_{r\times m} \mid \boldsymbol{X}^T \mid$, dove $\boldsymbol{0}_{r\times m}$ è una matrice di zeri $r \times n$, mentre $\boldsymbol{X}$ è una matrice con m righe e r colonne. Ogni colonna di $\boldsymbol{X}$ è un P-invariante. ■

Nel precedente algoritmo si noti che se uno qualunque dei due insiemi $\mathcal{I}_+$ o $\mathcal{I}_-$ è vuoto, al passo 2(c) non viene aggiunta alcuna riga, mentre al passo 2(d) vengono comunque eliminate le righe corrispondenti a elementi diversi da zero lungo la j-ma colonna se $\mathcal{I}_+ \cup \mathcal{I}_- \neq \emptyset$. Inoltre la tabella risultante sarà vuota (cioè $r = 0$) qualora la rete N non abbia alcun P-invariante.

Infine si osservi che potrebbe essere necessario dividere una colonna di $\boldsymbol{X}$ per il massimo comun divisore dei suoi elementi per ottenere un P-invariante minimale.

Si presenta ora un semplice esempio di applicazione di questo algoritmo. Si consideri la rete in Figura 4.28.



Si costruisca inizialmente la tabella

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|\end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array}$$

dove per chiarezza di esposizione è stata etichettata ogni riga col corrispondente posto. Al passo $j = 1$ si esegue la somma delle righe p_1 e p_2 (per annullare gli elementi diversi da zero lungo la prima colonna) e le si cancella, ottenendo la tabella

$$\left|\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_1 + p_2 \end{array}$$

Al passo $j = 2$ si esegue la combinazione lineare della riga p_4 con la riga p_5 moltiplicata per 2, e si cancellano le due righe, ottenendo la tabella

$$\left|\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} p_3 \\ p_1 + p_2 \\ p_4 + 2p_5 \end{array}$$

Al passo $j = 3$ vi sono due combinazioni possibili: la somma della riga p_3 moltiplicata per 2 e, rispettivamente, la riga $p_1 + p_2$ ovvero la riga $p_4 + 2p_5$. Eseguite tali somme e cancellate le tre righe si ottiene la tabella

$$\left|\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} p_1 + p_2 + 2p_3 \\ 2p_3 + p_4 + 2p_5 \end{array}$$

Al passo $j = 4$ non vi sono combinazioni possibili e ci si limita a cancellare la riga $2p_3 + p_4 + 2p_5$ che ha un elemento diverso da zero in quarta colonna. La tabella risultante è

$$\left|\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad p_1 + p_2 + 2p_3$$

La rete ha dunque un solo P-invariante minimale e di supporto minimo, $\boldsymbol{x} = [1\ 1\ 2\ 0\ 0]^T$.